高３　スタンダードレベル数学ⅠＡⅡＢを受講する皆さんへ

ようこそ，後期講座へ。

後期講座では，まずは単元別の入試問題を扱うことで，前期講座で培った力を確認していただきます。定着が薄い単元がある場合は，前期のテキストに戻ってください。また，前期では触れることのできなかった解法も問題を通じて紹介いたします。じっくり取り組んでください。

そして最後の８講は「総合問題」と称し，融合問題にチャレンジをしてもらいます。問題のレベルが飛躍的に上がることはありませんが，様々な分野や複合的な知識を要求する入試問題を掲載しています。初めて出会う局面も含め，現状をどう切り拓いていくかをじっくり考えながら予習を行ってください。それが，入試本場でみなさんが問題を目の前にして行うべきことです。

この後期講座を一通りやれば，「問題をとらえる力」の土台があなたのものになるでしょう。そしてこの講座の受講終了が，新たな始まりです。さらなる力をつけるために，ハイレベルの講座にチャレンジするのもよいでしょう。また，入試問題集や大学の過去問を解き，解答と照らし合わせることで，数学の力の幅をさらに広げていきましょう。

前期講座でも触れましたが，「人から人へ」，それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。真剣に動画を視聴してください。一緒に数学の世界を少しずつ紐解いていきましょう。

さぁ，そろそろ時間です。まずはしっかりと「予習」し，自分の力を確認しておいてください。いつでも，どこでも，何度でも。『受験サプリ』は君たちと共にあります。

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜後期　目次＞

講	タイトル
第 25 講	数と式・方程式・不等式(1)
第 26 講	数と式・方程式・不等式(2)
第 27 講	場合の数・確率(1)
第 28 講	場合の数・確率(2)
第 29 講	三角比・平面図形
第 30 講	関数総合(1)
第 31 講	関数総合(2)
第 32 講	関数総合(3)
第 33 講	関数総合(4)
第 34 講	関数総合(5)
第 35 講	関数総合(6)
第 36 講	数列
第 37 講	ベクトル(1)
第 38 講	ベクトル(2)
第 39 講	論証，証明
第 40 講	整数問題
第 41 講	総合問題(1)
第 42 講	総合問題(2)
第 43 講	総合問題(3)
第 44 講	総合問題(4)
第 45 講	総合問題(5)
第 46 講	総合問題(6)
第 47 講	総合問題(7)
第 48 講	総合問題(8)

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」3問で構成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろんな可能性を追ってみましょう。

ちなみに1問にかけてよい時間はおよそ15分〜20分（[1][2]に分かれている場合はそれぞれおよそ10分）です。3問でおよそ1時間。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

問題が掲載されているページは全て見開きの構成となっています。また，見開きの右側には余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られていますから，先生は全てを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でよいのです。

これまでの人生で，書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。置いていかれそうになったら，動画を止めてゆっくり書くのもよいでしょう。けれども，「聞きながら書く」という訓練はこれからでも遅くありませんよ。この講義を通じて「聞きながら書く」ということを実践してみてください。

ただし動画を止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　「だいたいこういうことかな」という感じで大枠をとらえた上で，細かいところは後からこだわる姿勢も時には大事ですよ。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題を見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったら「Note」欄を見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を別の紙や復習用ノートに解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などにより途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現してよいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「解答例」がついています。必要に応じて参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいてもう一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となりましょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講に用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度も様々です。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選した問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に近づくことができます。入試を想定すると，最終的には自分で答案を作り上げる必要があります。授業を受けるだけでは，「受けっぱなし」に終わることもあるでしょう。また，記憶とともに忘れ去られてしまうことも。それを防ぐためのこのサイクルが大切です。もちろん，授業は何度でも再生可能です。後から改めて見るとその意味がわかった，という声もよく耳にします。決して短くはないこの道のり。一日一日，一歩一歩，焦らず，確実に進んで行きましょう。

最後に。この講義と同時並行で進める日々の自主学習においては，その理解を深めるための「解説」が重要です。例えば「授業」や「解答集」がそれに当たります。とくに「詳細な解答」，つまり答えにたどり着く「プロセス」を，自分の解答と照らし合わせる作業が欠かせません。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ですから「最後の答」しかない問題集やプリントではお話になりません。「自分で考えれば必ず答えにたどり着く！」とおっしゃる先生もいますが，「知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう。受験勉強に求められるのは，「時間対効果」です。

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」としながら自主学習を進めて行きましょう。それが，自力で進むことができる力を養うための，効率のよい学習法なのです。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 25 講　数と式・方程式・不等式(1)

1　次の式を因数分解せよ.

(1)　$(x-y)^3+(z-y)^3-(x-2y+z)^3$

(2)　$4x^4+7x^2+16$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］　$a-b=4$，$b-c=3$ のとき，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$，
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ の値をそれぞれ求めよ．

［2］　連立方程式 $\begin{cases} 4x-3y+3z=3 \\ 3x-4y+2z=1 \\ y^2+x+z=\dfrac{11}{4} \end{cases}$ を解け．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　連立方程式 $\begin{cases} x^2-2y=8 \\ y^2-2x=8 \end{cases}$ を解け．

［2］　3つの数 x，y，z が $x<y<z$，$y>0$ および $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$，$x+1=y$，$y+1=z$ を満足するとき，次の問いに答えよ．

(1)　x の値を求めよ．

(2)　$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+3xyz+3(x+y+z)$ の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第25講　数と式・方程式・不等式(1)

[1]　$x^4+4=(x^2+$ **ア** $x+$ **イ** $)(x^2-$ **ア** $x+$ **イ** $)$ である.

[2]　$a+b+c=-3$, $ab+bc+ca=3$ のとき,

$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=$ **ウ** , $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}=$ **エ** である.

[3]　互いに異なる定数 a, b, c が, $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ を満たすとき,

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ の式の値を求めたい. $\dfrac{b+c}{a}=k$ ……① とおくと,

$k=$ **オ** または $a+b+c=$ **カ** である. $k=$ **オ** は問題に適さない. また,

$a+b+c=$ **カ** のとき, ①より $k=$ **キク** である. さらに

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=k^{\boxed{ケ}}$ であることから, 求める式の値は **コサ** であることがわかる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 25 講　数と式・方程式・不等式(1)

1　次の式を因数分解せよ．

(1)　$(x-y)^3+(z-y)^3-(x-2y+z)^3$

(2)　$4x^4+7x^2+16$

(1)　$x-y=A$，$z-y=B$ とおくと，$x-2y+z=(x-y)+(z-y)=A+B$　より

$$(x-y)^3+(z-y)^3-(x-2y+z)^3$$
$$=A^3+B^3-(A+B)^3$$
$$=A^3+B^3-(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)$$
$$=-3A^2B-3AB^2$$
$$=-3AB(A+B)$$
$$=-3(x-y)(z-y)(x-y+z-y)=\mathbf{3(x-y)(y-z)(x-2y+z)}$$

(2)　$x^2=X$ とおくと

$$4x^4+7x^2+16=4X^2+7X+16=(2X)^2+7X+4^2$$
$$=(2X)^2+16X+4^2-9X$$
$$=(2X+4)^2-9X$$
$$=(2x^2+4)^2-9x^2$$
$$=(2x^2+4)^2-(3x)^2=\mathbf{(2x^2+3x+4)(2x^2-3x+4)}$$

2　[1]　$a-b=4$，$b-c=3$ のとき，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$，
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ の値をそれぞれ求めよ．

$a-b=4$，$b-c=3$　より　$a-c=(a-b)+(b-c)=4+3=7$

よって　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=4^2+3^2+7^2=\mathbf{74}$$

また，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$$
$$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\quad\text{より}$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=\frac{1}{2}\times74=\mathbf{37}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2] [2]　連立方程式 $\begin{cases} 4x-3y+3z=3 \\ 3x-4y+2z=1 \\ y^2+x+z=\dfrac{11}{4} \end{cases}$ を解け.

$\begin{cases} 4x-3y+3z=3 & \cdots\cdots① \\ 3x-4y+2z=1 & \cdots\cdots② \\ y^2+x+z=\dfrac{11}{4} & \cdots\cdots③ \end{cases}$ について

①より　$4x+3z=3y+3$　……①′

②より　$3x+2z=4y+1$　……②′

①′，②′より　$x=6y-3$　……④　$z=-7y+5$　……⑤

これらを③に代入して　$y^2+(6y-3)+(-7y+5)=\dfrac{11}{4}$

$4y^2-4y-3=0$　　$(2y-3)(2y+1)=0$　　$y=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}$

これと④，⑤より　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=\left(6,\ \dfrac{3}{2},\ -\dfrac{11}{2}\right),\ \left(-6,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{17}{2}\right)}$

[3] [1]　連立方程式 $\begin{cases} x^2-2y=8 \\ y^2-2x=8 \end{cases}$ を解け.

$\begin{cases} x^2-2y=8 & \cdots\cdots① \\ y^2-2x=8 & \cdots\cdots② \end{cases}$ について

$x^2-2y=y^2-2x$　より　$x^2-y^2+2x-2y=0$

$(x-y)(x+y)+2(x-y)=0$　　$(x-y)(x+y+2)=0$

よって　$x=y,\ x+y+2=0$

(i)　$x=y$ のとき

①より　$x^2-2x=8$　　$x^2-2x-8=0$　　$(x-4)(x+2)=0$　　$x=4,\ -2$

よって　$(x,\ y)=(4,\ 4),\ (-2,\ -2)$

(ii)　$x+y+2=0$ のとき

$y=-x-2$　これを①に代入して　$x^2-2(-x-2)=8$

$x^2+2x-4=0$　　$x=-1\pm\sqrt{5}$

$x=-1+\sqrt{5}$ のとき　$y=-x-2=-(-1+\sqrt{5})-2=-1-\sqrt{5}$

$x=-1-\sqrt{5}$ のとき　$y=-x-2=-(-1-\sqrt{5})-2=-1+\sqrt{5}$

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{(x,\ y)=(4,\ 4),\ (-2,\ -2),\ (-1\pm\sqrt{5},\ -1\mp\sqrt{5})}$　**（複号同順）**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [2]　3 つの数 $x,\ y,\ z$ が $x<y<z,\ y>0$ および $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2,\ x+1=y,$ $y+1=z$ を満足するとき，次の問いに答えよ．

(1)　x の値を求めよ．

(2)　$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+3xyz+3(x+y+z)$ の値を求めよ．

(1)　$x+1=y,\ y+1=z$ より　$y=x+1,\ z=y+1=(x+1)+1=x+2$

これらを $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$ に代入して

$(3x+3)^2=x^2+(x+1)^2+(x+2)^2$

$3x^2+6x+2=0$　　$x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot3\cdot2}}{6}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}=-1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

このうち $y>0$ つまり $x>-1$ を満たすのは　$\boldsymbol{x=-1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

(2)　$x+y+z=3x+3=3\cdot\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}+3=\sqrt{3}$

$xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+3xyz+3(x+y+z)$

$=xy(\sqrt{3}-z)+xz(\sqrt{3}-y)+yz(\sqrt{3}-x)+3xyz+3\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}(xy+yz+zx)+3\sqrt{3}$

ここで　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

題意より　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$　より　$(2xy+2yz+2zx)=0$

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}=0$$

よって求める値は　$\sqrt{3}\cdot0+3\sqrt{3}=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 25 講　数と式・方程式・不等式(1)

[1]　$x^4+4=(x^2+$ **ア** $x+$ **イ** $)(x^2-$ **ア** $x+$ **イ** $)$ である．

[2]　$a+b+c=-3$，$ab+bc+ca=3$ のとき，

$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=$ **ウ** ，$\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}=$ **エ** である．

[3]　互いに異なる定数 a，b，c が，$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ を満たすとき，

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ の式の値を求めたい．$\dfrac{b+c}{a}=k$ ……① とおくと，

$k=$ **オ** または $a+b+c=$ **カ** である．$k=$ **オ** は問題に適さない．また，

$a+b+c=$ **カ** のとき，①より $k=$ **キク** である．さらに

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=k^{\text{ケ}}$ であることから，求める式の値は **コサ** であることがわかる．

解答例

[1]　$x^4+4=(x^2)^2+4=(x^2)^2+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+\mathbf{2}x+\mathbf{2})(x^2-2x+2)$

[2]　$a+1=A$，$b+1=B$，$c+1=C$ とおくと，$a=A-1$，$b=B-1$，$c=C-1$

$a+b+c=-3$　より　$A-1+B-1+C-1=-3$　　よって　$A+B+C=0$

$ab+bc+ca=3$　より

$(A-1)(B-1)+(B-1)(C-1)+(C-1)(A-1)=3$

$AB+BC+CA-2(A+B+C)=0$　　よって　$AB+BC+CA=0$

ゆえに　$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}=\dfrac{AB+BC+CA}{ABC}=\mathbf{0}$　……①

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{A-1}{A}+\frac{B-1}{B}+\frac{C-1}{C}$$

$$=1-\frac{1}{A}+1-\frac{1}{B}+1-\frac{1}{C}$$

$$=3-\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)=\mathbf{3}\quad (①より)$$

[3]　$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$　とおくと　$b+c=ak$，$c+a=bk$，$a+b=ck$

これらを辺々加えて　$2(a+b+c)=k(a+b+c)$

よって　$(k-2)(a+b+c)=0$　より　　$k=\mathbf{2}$　または　$a+b+c=\mathbf{0}$

$k=2$ のとき　$b+c=2a$，$c+a=2b$　　これらより辺々をひいて c を消去すると

$b-a=2a-2b$

よって　$a=b$ より a，b が異なることに反する．

$a+b+c=0$ のとき　$k=\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{-a}{a}=\mathbf{-1}$

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}\cdot\frac{a+b}{c}=k^{\mathbf{3}}=\mathbf{-1}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。